団代数から定まる扇と Coxeter 構造

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科 多元数理科学専攻
赤木亮太 (Ryota AKAGI) *

概要

団代数理論の中に,「G 扇」と呼ばれる幾何組み合わせ的な重要な対象がある. 一般に団代数は整数成分歪対称化可能行列から生じるが, ある側面からみると G 扇は実成分の歪対称化可能行列に対しても定義可能である. 本講演では, その一般化と Coxeter 群に関連する構造との関係性について述べる. 本研究は中国科学技術大学 (University of Science and Technology of China) の Zhichao Chen 氏との共同研究に基づく.

1 団代数の定義と例

団代数とは, 2000 年頃に Fomin, Zelevinsky により導入された構造である [1]. その本質的な構造は**変異**と呼ばれる非常に巧妙な組み合わせ的操作であり, 数多くの非自明な現象を引き起こす. そのような特殊性により, 比較的具体的な扱いが可能である. その一方で, 箙の表現や散乱図に現れる壁越え現象にも変異に関連する構造が発見されるなど, 幅広い応用性を持つことが知られている.

その団代数理論の本質的構造の一つに,「G 扇」とよばれるものがある. 本稿では, その G 扇と団代数の関係性と, その拡張について述べる.

1.1 団代数の定義

団代数の定義について述べる. グラフ $\mathbb{T}_n$ を n 次の正則木であって, 各頂点 $t \in \mathbb{T}_n$ からでる n 個の辺が $1,\dots,n$ によりラベルづけられているものとする. 二つの頂点 $t, t' \in \mathbb{T}_n$ が $k = 1,\dots,n$ 隣接するとは, t と t' が k でラベルづけられた辺でつながっていることをいう. 頂点 $t_0 \in \mathbb{T}_n$ を一つ固定し, これを**初期頂点**とよぶ. 正方行列 $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ が**歪対称化可能**であるとは, 正の対角成分を持つある対角行列 $D = \mathrm{diag}(d_1,\dots,d_n)$ $(d_i > 0)$ により DB が歪対称になることをいう. 団代数の文脈では, 歪対称化可能行列は**交換行列**と呼ばれる. 整数成分の交換行列 $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z})$ に対し, 次の $2n \times n$ 行列の族 $\{\tilde{B}_t\}_{t\in\mathbb{T}_n}$ を考える.

- 初期頂点に対しては, $\tilde{B}_{t_0} = \left(\begin{smallmatrix} B \\ I \end{smallmatrix}\right)$ とする. ここで I は n 次の単位行列.
- t と t' が k 隣接するとき, $\tilde{B}_t = (\tilde{b}_{ij;t})$ と $\tilde{B}_{t'} = (\tilde{b}_{ij;t'})$ には以下の関係が成り立つ.

$$\tilde{b}_{ij;t'} = \begin{cases} -\tilde{b}_{ij;t} & i = k \text{ または } j = k, \\ \tilde{b}_{ij;t} + \tilde{b}_{ik;t}[\tilde{b}_{kj;t}]_+ + [-\tilde{b}_{ik;t}]_+\tilde{b}_{kj;t} & i, j \neq k. \end{cases} \tag{1}$$

* ryota.akagi.e6@math.nagoya-u.ac.jp

ここで現れる行列 $\tilde{B}_t$ を**拡張交換行列**といい, 変換規則 (1) を (拡張交換行列の) **変異**という．また, $\tilde{B}_t$ を上側 $n \times n$ 行列 B_t と下側 $n \times n$ 行列 C_t で分割し, B_t を B **行列**, C_t を C **行列**とよぶ．また, B_t 全体がなす集合 $\mathbf{B}(B) = \{B_t \mid t \in \mathbb{T}_n\}$ を**変異類**とよび, $B' \in \mathbf{B}(B)$ であるとき B と B' は**変異同値**であるという．(実は, 変異は対合的であることが知られており, これは確かに歪対称化可能行列全体の同値関係を与える.)

漸化式 (1) は行列の操作としても表示される．$k = 1, \dots, n$ に対し, J_k を単位行列 I から (k,k) 成分のみを -1 に置き換えて得られる単位行列とし, 行列 A に対し, $[A]_+^{\bullet k}$ (および $[A]_+^{k\bullet}$) を第 k 列 (および k 行) の正である成分以外全てを 0 に置き換えることで得られる行列とする.

命題 1.1. k 隣接する頂点 $t, t' \in \mathbb{T}_n$ に対し, 次の漸化式が成り立つ.

$$B_{t'} = (J_k + [-B_t]_+^{\bullet k}) B_t (J_k + [B_t]_+^{k\bullet}), \quad C_{t'} = C_t J_k + C_t [B_t]_+^{k\bullet} + [-C_t]_+^{\bullet k} B_t. \tag{2}$$

次に (主係数) 団変数の定義に入る．ある n 個の形式的変数 $y_1, \dots, y_n$ を固定し, これを**凍結変数**という．また, $\tilde{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}[y_1^{\pm 1}, \dots, y_n^{\pm 1}]$ を $\mathbb{Z}$ 係数の $y_1, \dots, y_n$ 変数 Laurent 多項式環とし, $\tilde{\mathbb{Z}}$ 係数の n 変数有理関数体 $\mathcal{F}$ を一つ取り固定する．(これを**周囲体**という.) $\tilde{\mathbb{Z}}$ 上, $\mathcal{F}$ を生成する順序付き基底 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ とある拡張交換行列 $\tilde{B} = \tilde{B}_t$ の組 $\Sigma = (\mathbf{x}, \tilde{B})$ を**種子**という．この種子 $(\mathbf{x}, \tilde{B})$ と $k = 1, \dots, n$ に対して,

$$\theta_k^+ = \prod_{b_{jk}>0} x_j^{b_{jk}} \cdot \prod_{c_{jk}>0} y_j^{c_{jk}}, \quad \theta_k^- = \prod_{b_{jk}<0} x_j^{-b_{jk}} \cdot \prod_{c_{jk}<0} y_j^{-c_{jk}}$$

とおき, 次のように新たな種子 $\Sigma' = (\mathbf{x}' = (x_1', \dots, x_n'), \tilde{B}') = \mu_k(\Sigma)$ を与える操作を k 方向**変異**という.

$$x_i' = \begin{cases} x_k^{-1}(\theta_k^+ + \theta_k^-) & i = k, \\ x_i & i \neq k, \end{cases} \quad B' = B_{t'}.$$

今, 種子 Σ_{t_0} を一つ固定し, そこから変異を繰り返すことにより種子の族 $\boldsymbol{\Sigma} = \{\Sigma_t\}_{t \in \mathbb{T}_n}$ が与えられる．これを**団パターン**という．また, この中に現れる $\mathbf{x}_t = (x_{1;t}, \dots, x_{n;t})$ を**団**, その要素 $x_{i;t}$ を**団変数**という．これらの団変数全体が $\tilde{\mathbb{Z}}$ 代数として生成する $\mathcal{F}$ の部分代数を**団代数**という.

1.2 例

定義は長くなったが, 団代数の骨格は「変異」により団変数を生成することであり, それらがなす代数を団代数と呼ぶ.

(主係数) 団パターンの非自明かつ最も単純な例 (A_2 型) を以下に挙げる．初期交換行列を $B_{t_0} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ とする．このとき, 拡張交換行列のパターンは以下のように与えられる.

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \overset{1}{\longleftrightarrow} \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ \hline -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \overset{2}{\longleftrightarrow} \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ \hline -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \overset{1}{\longleftrightarrow} \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ \hline 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \overset{2}{\longleftrightarrow} \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} \overset{1}{\longleftrightarrow} \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

また, 初期団変数を $\mathbf{x}_{t_0} = (x_1, x_2)$, 凍結変数を $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ とすると, この拡張行列に対応する団変数は次で

与えられる．

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{cases} x_{1;t_0} = x_1 \\ x_{2;t_0} = x_2 \end{cases}} \arrow[r, leftrightarrow, "1"] & \boxed{\begin{cases} x_{1;t_1} = x_1^{-1}(1+y_1x_2) \\ x_{2;t_1} = x_2 \end{cases}} \arrow[r, leftrightarrow, "2"] & \boxed{\begin{cases} x_{1;t_2} = x_1^{-1}(1+y_1x_2) \\ x_{2;t_2} = x_2^{-1}(1+y_2x_1^{-1}+y_1x_2y_2x_1^{-1}) \end{cases}} \arrow[d, leftrightarrow, "\star"', "1"] \\
\boxed{\begin{cases} x_{1;t_5} = x_2 \\ x_{2;t_5} = x_1 \end{cases}} \arrow[r, leftrightarrow, "1"] & \boxed{\begin{cases} x_{1;t_4} = x_1x_2^{-1}(1+y_2x_1^{-1}) \\ x_{2;t_4} = x_1 \end{cases}} \arrow[r, leftrightarrow, "2"] & \boxed{\begin{cases} x_{1;t_3} = x_1x_2^{-1}(1+y_2x_1^{-1}) \\ x_{2;t_3} = x_2^{-1}(1+y_2x_1^{-1}+y_1x_2y_2x_1^{-1}) \end{cases}}
\end{tikzcd} \tag{3}$$

ここで, 団変数の具体例における $\star$ の計算を定義通りに書き下すと

$$x_{1;t_3} = \frac{x_2^{-1}(1+y_2x_1^{-1}+y_1x_2y_2x_1^{-1})+y_1}{x_1^{-1}(1+y_1x_2)}$$

となることに注意しよう．この式の分母は多項式である．一方で, この計算を進めると, $1+y_1x_2$ が約分されて

$$x_{1;t_3} = x_1x_2^{-1}\frac{(1+y_2x_1^{-1})(1+y_1x_2)}{1+y_1x_2} = x_1x_2^{-1}(1+y_2x_1^{-1})$$

となり, **$x_{1;t_3}$ は x_1, x_2 の $\mathbb{Z}[y_1, y_2]$ 係数 *Laurent* 多項式で表示される**．この性質は団代数理論における最も基本的な原理であり, *Laurent* **現象**と呼ばれる [1].

1.3 基本的な性質

話をランク n の団代数一般に戻す．初期種子 $(\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), B)$ と凍結変数 $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ を固定する．Laurent 現象により, 任意の団変数 $x_{i;t}$ は $x_1, \ldots, x_n$ の $\mathbb{Z}[\mathbf{y}] = \mathbb{Z}[y_1, \ldots, y_n]$ 係数 Laurent 多項式になるが, これに $x_1 = \cdots = x_n = 1$ を代入することで, $y_1, \ldots, y_n$ の整数係数多項式

$$F_{i;t}(\mathbf{y}) = x_{i;t}|_{x_1=\cdots=x_n=1}$$

が得られる．これを F **多項式**という．また,

$$\hat{y}_k = y_k \prod_{j=1}^{n} x_j^{b_{jk}}$$

を $\hat{y}$ **変数**という．$\hat{\mathbf{y}} = (\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n)$ とする．F 多項式は団変数の特殊な情報により定義されるが, 実は次の性質により団変数を復元する．

命題 1.2 ([2])**.** 任意の団変数 $x_{i;t}$ は, ある整数 $g_{1i;t}, \ldots, g_{ni;t} \in \mathbb{Z}$ により

$$x_{i;t} = \left(\prod_{j=1}^{n} x_j^{g_{ji;t}}\right) F_{i;t}(\hat{\mathbf{y}})$$

と表される．さらに, 整数 $g_{ji;t}$ は後述する漸化式 (4) により, 団変数と独立して求められる．

例えば, 初期交換行列 $B_{t_0} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ に対応する $\hat{y}$ 変数は, $\hat{y}_1 = y_1x_2$ と $\hat{y}_2 = y_2x_1^{-1}$ により与えられ, 例 (3) の各団変数は $x_1^{g_1}x_2^{g_2} \times (\hat{y}_1, \hat{y}_2$ の多項式) という形で表されていることが見える．

この整数 $g_{1i;t}, \ldots, g_{ni;t}$ を並べた列ベクトル $\mathbf{g}_{i;t} = (g_{1i;t}, \ldots, g_{ni;t})^\top$ を g **ベクトル**といい, それらを並べた行列 $G_t = (\mathbf{g}_{1;t}, \ldots, \mathbf{g}_{n;t})$ を G **行列**という．実は, この G 行列には次の漸化式が知られている．

命題 1.3. G 行列は, 初期条件 $G_{t_0} = I$ と次の漸化式により求まる．

$$G_{t'} = G_tJ_k + G_t[B_t]_+^{\bullet k} - B_{t_0}[C_t]_+^{\bullet k}. \tag{4}$$

ここで, t と t' は $k = 1, \ldots, n$ 隣接する頂点である．

1.4 重要な原理

C 行列 C_t と G 行列 G_t の列ベクトルを $C_t = (\mathbf{c}_{1;t}, \ldots, \mathbf{c}_{n;t})$, $G_t = (\mathbf{g}_{1;t}, \ldots, \mathbf{g}_{n;t})$ とする． 次の事実は団代数理論の本質的要素である．

定理 1.4 (c ベクトルの符号同一性 [3])**.** 整数成分の歪対称化可能行列 B に対して, 任意の c ベクトルは, 零ベクトルでなく, かつ全ての成分が非負であるか非正であるかのいずれか一方である．

この一見するだけでは何の変哲も感じない性質は, 実は団代数の本質的性質である．実際に, あらゆる文献において, この性質を仮定することで様々な性質が導かれることが示されている．一方で, この問に対する初等的な証明はいまだ知られていない．([3] では, 散乱図と呼ばれるミラー対称性から生じる対象に, 団代数の各種対応物を埋め込むことで示された.)

例えば, この事実と F 多項式の正値性 [3] (全ての係数が非負であること) を用いることで, 次のことが示される．

定理 1.5 ([4])**.** 任意の $t, t' \in \mathbb{T}_n$ と $i, j = 1, \ldots, n$ に対して, g ベクトルが一致すること $\mathbf{g}_{i;t} = \mathbf{g}_{j;t'}$ と団変数が一致すること $x_{i;t} = x_{j;t'}$ は同値である．

この事実から, **団変数が持つ周期性**を調べるためには g **ベクトルがもつ周期性を調べれば十分**である．(これは g ベクトルが団変数の次数という非常に限られた情報により定義されたことを踏まえると, 驚くべき強力な定理である.)

1.5 G 扇

このようにして g ベクトルは団変数の周期性を完全に保存するという良い性質があるが, さらに幾何組み合わせ的に興味深い構造をもつことが知られている．G 行列 $G_t = (\mathbf{g}_{1;t}, \ldots, \mathbf{g}_{n;t})$ と $J \subset \{1, \ldots, n\}$ に対して, 次の集合を G **錐**という．

$$\sigma_J(G_t) = \left\{ \sum_{j \in J} \lambda_j \mathbf{g}_{j;t} \;\middle|\; \lambda_j \geq 0 \right\} \subset \mathbb{R}^n.$$

特に, $\sigma_{\{1,\ldots,n\}}(G_t) = \sigma(G_t)$ と書く．初期行列 $B = B_{t_0}$ における G 錐全体の集合

$$\Delta(B) = \{\sigma_J(G_t) \mid t \in \mathbb{T}_n,\ J \subset \{1, \ldots, n\}\}$$

を G **扇**という．この名前は次の事実に基づく．

定理 1.6 ([4, 5])**.** B を整数成分歪対称化可能行列とする．このとき, G 扇 $\Delta(B)$ は扇である．つまり, 次の条件を満たす．

- 任意の $\sigma \in \Delta(B)$ に対し, σ の面も全て $\Delta(B)$ に属する．
- 任意の $\sigma, \tau \in \Delta(B)$ に対し, $\sigma \cap \tau$ は σ, τ 両方の面である．

B の歪対称化因子 $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ を一つ取り固定する．$\mathbb{R}^n$ 上の内積 $\langle\, , \,\rangle_D$ を $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_D = \mathbf{a}^\top D \mathbf{b}$ により定義する．このとき, c ベクトルは, 次のように G 扇の中に現れる．

命題 1.7. 次の式が成り立つ．

$$\langle \mathbf{c}_{i;t}, \mathbf{g}_{j;t} \rangle_D = \begin{cases} d_i & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

特に, $\mathbf{c}_{i;t}$ は, 面 $\sigma_{\{1,\ldots,n\} \setminus \{i\}}(G_t)$ の法ベクトルである．

実際に, A_2 型の G 扇は図 1 のように与えられる．

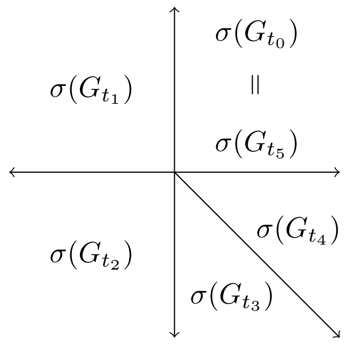

図 1　A_2 型 G 扇

1.6　講演の目的-実成分への団代数理論の拡張-

これまで, g ベクトルは団変数の主要な情報を持つことをみた．団変数は整数成分歪対称行列 B により定まるため, これまでは整数成分をもつ g ベクトルが考察の対象であった．一方で, B, C, G 行列を与える漸化式 (2), (4) を考えると, g ベクトルは**実成分を持つ交換行列に対しても定義可能である**．本講演では, その実成分に拡張した場合に現れる g ベクトルの構造について話す.

ただし, 実成分に拡張すると, c ベクトルの符号同一性 (定理 1.4) は**常には成り立たない**．(その場合, 既存の団代数理論で発見された良い性質は尽く消失している.) また, c ベクトルの符号同一性が判明したとしても, 既存の団代数理論との類似が得られるかは非自明である．そこで, 次のことが基本的な課題として挙げられるであろう.

問題 1.8.

1. c ベクトルの符号同一性が成り立つとき, G 扇構造は導かれるだろうか.
2. c ベクトルの符号同一性はいつ成り立つのだろうか.

1.7　実成分の拡張への動機付け (歪対称化法)

次の事実は, 実成分 C, G 行列構造を導入することへの動機付けを与える．歪対称化可能行列 $B = (b_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ に対して, 行列 $\mathrm{Sk}(B) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ を

$$\mathrm{Sk}(B) = \left(\mathrm{sign}(b_{ij})\sqrt{|b_{ij}b_{ji}|}\right)$$

として定める．定義から, $\mathrm{Sk}(B)$ は歪対称行列である．B の歪対称化因子 $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ を一つ取り固定する．また, $D^{\frac{1}{2}} = \mathrm{diag}(\sqrt{d_1}, \ldots, \sqrt{d_n})$, $D^{-\frac{1}{2}} = (D^{\frac{1}{2}})^{-1}$ とする．このとき, 次の事実が成り立つ.

定理 1.9 (歪対称化法)**.** 初期交換行列を B とする行列パターン B_t, C_t, G_t と, 初期交換行列を $\mathrm{Sk}(B)$ とする行列パターン $\tilde{B}_t$, $\tilde{C}_t$, $\tilde{G}_t$ には次の関係がある.

$$B_t = D^{-\frac{1}{2}}\tilde{B}_t D^{\frac{1}{2}}, \quad C_t = D^{-\frac{1}{2}}\tilde{C}_t D^{\frac{1}{2}}, \quad G_t = D^{-\frac{1}{2}}\tilde{G}_t D^{\frac{1}{2}}.$$

つまり, 歪対称な行列 $\mathrm{Sk}(B)$ から生じる B, C, G パターンから, 歪対称化可能な行列 B により生じるパターン全てが復元される.

操作 $\mathrm{Sk}(B)$ は実成分行列上で閉じた操作である．(一方で整数成分ではその限りではない.) したがって, 実成分の B, C, G パターンを考えるのであれば, **歪対称な B から生じるものを考えるだけでよい**．従って, 以降は B が歪対称であることを仮定する.

記述を簡単にするために, 歪対称行列 $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ に対応して, 以下の ($\mathbb{R}_{>0}$ で重みづけられた) 箙 $Q(B)$ を定義する.

- 頂点は $1, \ldots, n$ である.
- $b_{ij} > 0$ ならば, 重み b_{ij} をもつ矢 $i \xrightarrow{b_{ij}} j$ がある. さらに矢はこれだけである.

さらに上の規則に基づけば, (2-cycle と自己 loop を持たない) $\mathbb{R}_{>0}$ で重みづけられた箙から歪対称行列が復元される. 例えば, 以下のように歪対称行列と箙を対応付ける.

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 5 \\ -\sqrt{2} & 0 & -\pi \\ -5 & \pi & 0 \end{pmatrix} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{tikzcd} & 3 \arrow[dr, "\pi"] & \\ 1 \arrow[ur, "5"] \arrow[rr, "\sqrt{2}"'] & & 2 \end{tikzcd}$$

2 Coxeter 群と Coxeter 配置

既存の団代数理論は, 有限型の分類が半単純 Lie 代数の分類と一致する [8] こと, 歪対称化可能行列に基づいて定義されることなど, Kac-Moody の Lie 代数と密接な関係が知られていた. 実は, 実成分 C, G 行列においては Coxeter 群に付随する構造との類似が散見される. そのため, 主結果を述べる前に, Coxeter 群と付随するいくつかの構造を導入する.

2.1 Coxeter 群

次の条件を満たす n 頂点グラフ Γ を考える.

- 頂点は 1,. . . , n とラベルづけられている.
- 辺は 3 以上の整数または ∞ により重みづけられている.

$i, j = 1, \ldots, n$ に対し, m_{ij} を頂点 i と j をつなぐ辺の重みとする. ただし i と j が辺で結ばれていないときは $m_{ij} = 2$ とし, また $i = j$ のときは $m_{ii} = 1$ とする. このとき, Γ に対応する *Coxeter* **群**とは, n 個の生成元 $s_1, \ldots, s_n$ と Γ により定まる関係式により生成される以下の群のことをいう.

$$W(\Gamma) = \langle s_1, \ldots, s_n \mid (s_i s_j)^{m_{ij}} = \mathrm{id} \rangle.$$

ただし, $m_{ij} = \infty$ のとき, 関係式 $(s_i s_j)^{m_{ij}} = \mathrm{id}$ は無視する. この Γ に対応して, 実 $n \times n$ 行列

$$A = \left(-\cos \frac{\pi}{m_{ij}} \right) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \tag{5}$$

を *Schläfli* **行列**という. (対角成分は 1 であり, i と j がつながっていない場合は, (i, j) 成分が 0 になる.)

2.2 有限 Coxeter 群と Coxeter 配置

Coxeter 群が有限になるか否かは, 次の事実により完全に分類されている.

定理 2.1 ([6])**.** Γ を連結な Coxeter グラフとする. Coxeter 群 $W(\Gamma)$ が有限であることと, Γ が図 2 に現れる Coxeter 図であることは同値である.

また, このとき (n 頂点をもつ) Coxeter 群は $\mathbb{R}^n$ 上の**有限鏡映群** (鏡映のなす有限群) として実現され, かつすべての有限鏡映群はこのようなもので尽くされることが知られている. このとき, この鏡映面の配置を *Coxeter* **配置**と呼ぶ. また (大まかにいうと) その鏡映面の法線ベクトル (に長さの条件を付したもの) を**ルート**といい, その全体を**ルート系**という. 例として, A_2 型の超平面配置とルート系を以下に挙げる. $\mathbb{R}^n$ を上のルートを持たないある平面によってルート系を 2 つに分割し, その一方を**正ルート系**と呼ぶ. すると, その中で" 最も広い"基底をとることができる. (正確には, 他の正ルートを非負の線形結合として表示できる基底のことを言う.) これを**単純ルート系** Δ という.

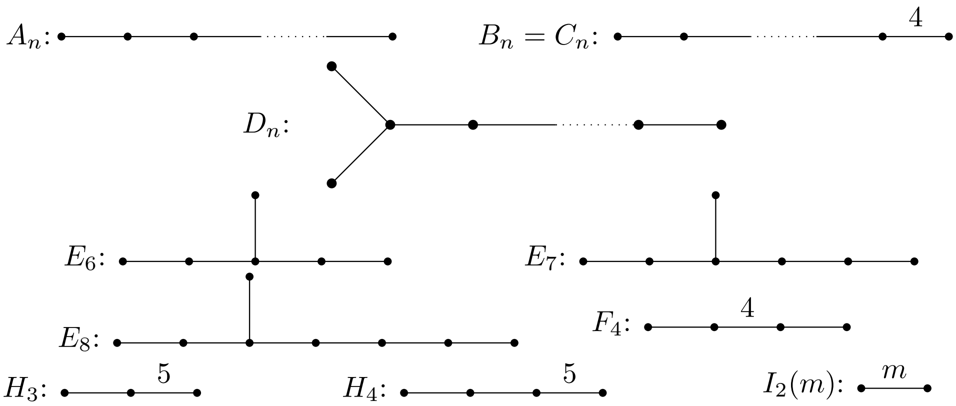

図 2　Coxeter 図. ただし, 辺の重み 3 を省略している. また, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ である.

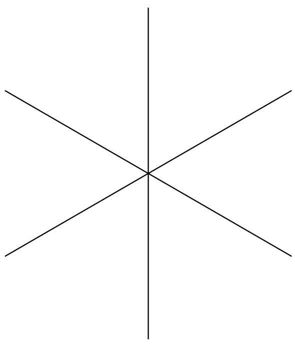

図 3　Coxeter 配置.

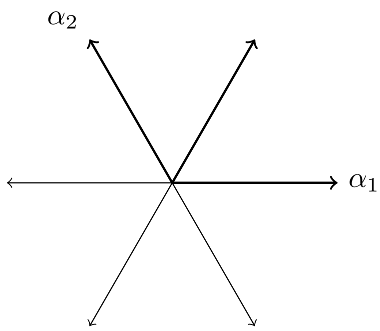

図 4　ルート系. 太い線で描かれたベクトルは正ルートであり, α_1, α_2 が単純ルートである.

3　主定理

3.1　G 扇構造を導く予想

まずは c ベクトルの符号同一性が G 扇構造を導くかどうかに関する主結果を述べる. この問に関連して, 次の予想を導入した.

予想 3.1 (全符号同一性予想)**.** B を歪対称な行列であって, その c ベクトルは全て符号同一であるとする. このとき, B または $B^\top$ と変異同値な任意の行列 B' に対しても, その c ベクトルは全て符号同一である.

予想 3.2 (離散性予想)**.** B を歪対称な行列であって, その c ベクトルは全て符号同一であるとする. もし, c ベクトルが第 i 成分単位ベクトルと平行になるのであれば, その長さは 1 である.

これら 2 つの予想は整数成分歪対称行列に対しては完全に解決されている. 一方で, 実成分に対してはまだ未解決である.

定理 3.3 ([7])**.** 予想 3.1 と予想 3.2 の元で, G 扇はたしかに扇となる.

3.2　符号同一性を満たすクラス

3.2.1　有限型の分類

次に, 有限型の分類について, 以下の結果を得た. この結果は, 整数成分の場合における [8] で知られていた結果の拡張である.

定理 3.4 ([7])**.** 歪対称行列 B に関して, 次の条件を考える.

任意の変異同値な $B' \sim B$ に対して, c ベクトルの符号同一性が成り立ち, かつ異なる c ベクトルは有限個しか現れない

B が以下の Coxeter 箙に変異同値であるとき, かつその時に限り, 上の条件が成り立つ.

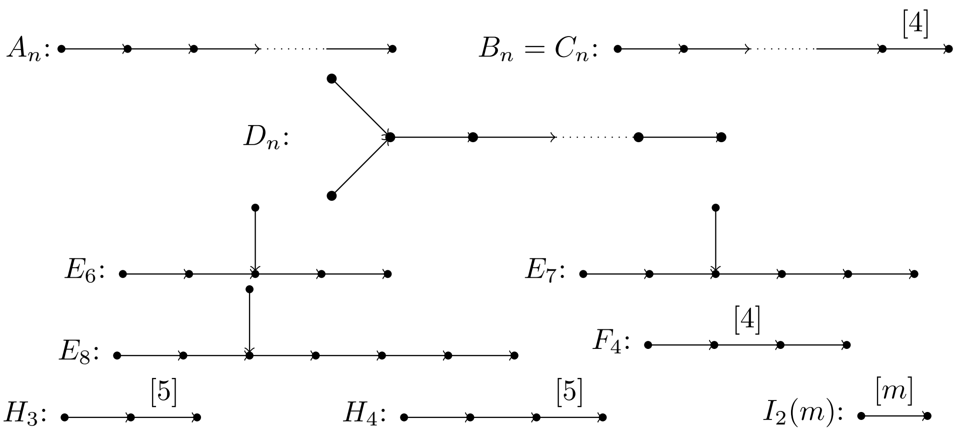

図 5　Coxeter 箙. $[m] = 2\cos\frac{\pi}{m}$ とする. (特に $[3] = 1$ を省略している.)

この箙は, 図 2 の各辺の重み m を $[m] = 2\cos\frac{\pi}{m}$ にして, ある向き付けを与えたものである. この操作の際に, 異なる向き付けも考えられるが, それは団代数の中ではそれは問題にならない. (このような箙については, いかなる向き付けを与えても, それは変異同値になる.) したがって, この事実は, **有限型の符号同一的 c ベクトルは, *Coxeter* 図により分類される**ことを意味する.

さらに, (コンピュータによる具体的な計算により) 次の Coxeter 配置との関係性を観測している. 有限型の Coxeter 図から正ルート系 Π と単純ルート系 Δ が定まるが, 集合 $\Pi_{\geq -1} = \Pi \cup (-\Delta)$ を**概正ルート系**とよぶ.

定理 3.5 ([7])**.** B は $X = A_n, \dots, I_2(m)$ のいずれかの Coxeter 箙に変異同値であるとする. このとき, G 扇構造が確かに定まり, かつ次の対応が成り立つ.

$$(g \text{ ベクトルの数}) = (\text{概正ルートの数}),\ (G \text{ 錐の数}) = (\text{概正ルートが定める部屋の数}).$$

一方で, 具体的に「概正ルート系と g ベクトルにどのような対応付けがあるか」という問は, (整数の場合でさえ) 一般的にはまだ解決していない. (いくつかの部分的な結果は様々知られてはいるが)

3.2.2　準整数型箙

定理 1.4 と定理 1.9 によると, 整数成分の歪対称化可能行列 B に対して, $\mathrm{Sk}(B)$ も c ベクトルの符号同一性を満たす. この $\mathrm{Sk}(B)$ に対応する箙を**準整数型箙**とよぶ. この準整数型箙 Q (これを歪対称行列 $Q = (q_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ と同一視する) に対して, 次の判定法を与えた.

定理 3.6 ([7])**.** 箙 $Q = (q_{ij})$ が準整数型であることと, 次の 2 条件を満たすことは同値である.

- 任意の i, j に対して, $q_{ij}^2 \in \mathbb{Z}$ である.

- 向きを無視した，任意の Q のサイクルについて，その辺の重みが順に q_{k_0,k_1}，q_{k_1,k_2}，$\dots$，q_{k_{r-1},k_r} $(k_0 = k_r)$ であるとする．このとき，その積

$$\prod_{j=1}^{r} q_{k_{j-1},k_j}$$

は整数である．

特に，上の 2 条件を満たす箙に対して，c ベクトルの符号同一性が成り立つ．

一般に，$Q = \mathrm{Sk}(B)$ となる整数成分歪対称化可能行列 B が何かを与えることは難しいが，この条件は容易に確認可能である．例えば，図 6 は準整数型であり，図 7 は準整数型ではない．

$$\begin{tikzcd} 4 \arrow[d, "3\sqrt{35}"'] & 3 \arrow[l, "5"'] \\ 1 \arrow[ur, "\sqrt{35}"'] \arrow[r, "4\sqrt{10}"'] & 2 \arrow[u, "2\sqrt{14}"'] \end{tikzcd}$$

図 6　準整数型箙.

$$\begin{tikzcd} 4 \arrow[d, "3"'] & 3 \arrow[l, "5"'] \\ 1 \arrow[ur, "\sqrt{5}"'] \arrow[r, "4\sqrt{5}"'] & 2 \arrow[u, "2"'] \end{tikzcd}$$

図 7　非準整数型箙.

実は，この定理 3.6 の条件には Coxeter 群の**結晶性**との類似がある．というのも，Coxeter 群 $W(\Gamma)$ が**結晶群**であるための必要十分条件は，対応する Schläfli 行列 A に対して，$2A$ がこの条件をみたすことと同値であることが知られている [6].

参考文献

[1] S. Fomin and A. V. Zelevinsky, *Cluster algebras. I. Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), no. 2, 497–529; MR1887642

[2] S. Fomin and A. V. Zelevinsky, *Cluster algebras. IV. Coefficients*, Compos. Math. **143** (2007), no. 1, 112–164; MR2295199

[3] M. Gross et al., *Canonical bases for cluster algebras*, J. Amer. Math. Soc. **31** (2018), no. 2, 497–608; MR3758151

[4] T. Nakanishi, *Cluster algebras and scattering diagrams*, MSJ Memoirs, 41, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2023; MR4563311

[5] N. Reading, *Universal geometric cluster algebras*, Math. Z. **277** (2014), no. 1-2, 499–547; MR3205782

[6] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 29, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990; MR1066460

[7] R. Akagi, and Z. Chen, *Real C-, G-structures and sign-coherence of cluster algebras* arXiv preprint arXiv:2509.06486 (2025).

[8] S. Fomin and A. V. Zelevinsky, *Cluster algebras. II. Finite type classification*, Invent. Math. **154** (2003), no. 1, 63–121; MR2004457